משואות דיפרנציאליות רגילות מועד ב' (104131)

- משך הבחינה שלוש שעות.
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש להשתמש בעט כחול או שחור בלבד. אין להשתמש בעפרון!
- אין להפריד את דף השער מדפי הבחינה.
- סך הנקודות במבחן הוא 100.
- הבחינה כוללת 9 שאלות .
- בשאלות הפתוחות (שאלות 1-4) יש לתת פתרון מלא, מנומק ומפורט, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.
- בשאלות האמריקאיות (שאלות 5-9) אין לרשום נימוקים. יש לסמן תשובה אחת בלבד, תשובה שגויה ובכלל זה סימון של יותר מתשובה אחת יגרור קבלת ניקוד 0.
- יש לענות על הבחינה: **בטופס שאלון הבחינה בלבד. המחברות לא ייבדקו.**

בהצלחה!

שאלות הפתוחות

<u>יש לתת פתרון מלא, מפורט ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.</u>

שאלה 1 (20%)

נתונה משפחת העקומים: $y = C(x-2)e^x$

א. (15%) מצאו עקומי המשפחה האורתוגונלית

ב. (5%) מצאו העקום מן המשפחה האורתוגונלית אשר עובר בנקודה $(2,4)$.

פתרון

$$,C = \frac{y}{e^x(x-2)}$$

$$,y' = C(e^x + (x-2)e^x) \Rightarrow y' = \frac{y}{e^x(x-2)}(e^x + (x-2)e^x) = y\frac{x-1}{x-2}$$

$$,y'_{\perp} = -\frac{1}{y'} = -\frac{x-2}{y(x-1)}$$

$$ydy = -\frac{x-2}{x-1}dx \Rightarrow \int ydy = -\int \frac{x-2}{x-1}dx = -\int\left(1-\frac{1}{x-1}\right)dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x-1| - x + C$$

משפחה אורתוגונלית מוגדרת ע"י משוואה: $\frac{y^2}{2} = \ln|x-1| - x + C$ או $y^2 = 2\ln|x-1| - 2x + C$

נחפש העקום מן המשפחה האורתוגונלית אשר עובר בנקודה $(2,4)$.

$$16 = 2\ln 1 - 4 + C \Rightarrow C = 20$$

אז העקום מן המשפחה האורתוגונלית אשר עובר בנקודה $(2,4)$ הוא: $y = \sqrt{2\ln|x-1| - 2x + 20}$

שאלה 2 (10%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2+y)dx + f(x)dy = 0$ כש- $f(x)$ פונקציה גזירה של x,

מצאו את הפונקציה $f(x)$ שמקיימת $f(1) = \frac{1}{2}$, ושעבורה $\mu(x) = x$ הוא גורם אינטגרציה של המשוואה הנתונה

פתרון:

$x(x^2+y)dx + xf(x)dy = 0$ - משוואה מדויקת, אז $\left(x(x^2+y)\right)'_y = \left(xf(x)\right)'_x$

$$\left(xf(x)\right)'_x = \left(x^3+xy)\right)'_y = x \Rightarrow xf(x) = \int xdx + C = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2}$$

שאלה 3 (20%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x\sqrt{x}$ בתחום $x>0$, נתון

שהפונקציה $y_1=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ היא פתרון של המשוואה ההומוגנית מתאימה.

א. (10%) מצא/י את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.

ב. (10%) מצא/י את פתרון הכללי של המשוואה אי הומוגנית

פתרון:

1). $y_h=?$

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x\sqrt{x}\Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2}y=\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{W(y_1,y_2)(x)}{y_1^2}=\frac{Ce^{-\int\frac{1}{x}dx}}{\frac{(\sin x)^2}{x}}=\frac{C\frac{1}{x}}{\frac{(\sin x)^2}{x}}=\frac{C}{(\sin x)^2}$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{Cdx}{\sin^2 x}=-C\cot x\Rightarrow y_2=-C\cot x\cdot y_1=-C\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=-C\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

לכן $y_h=C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

2). $y_p=?$

$$\Leftarrow\ y_p=C_1(x)\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+C_2(x)\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

$$,\begin{cases}C_1'\frac{\sin x}{x}+C_2'\frac{\cos x}{x}=0\\ C_1'\frac{\sqrt{x}\cos x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x}{x}+C_2'\frac{-\sqrt{x}\sin x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'\sin x + C_2'\cos x = 0 \\ C_1'\left(\sqrt{x}\cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x\right) + C_2'\left(-\sqrt{x}\sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x\right) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \sqrt{x} & -\sqrt{x}\sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \sqrt{x}\cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x & -\sqrt{x}\sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\sqrt{x}\cos x}{-\sqrt{x}} = \cos x$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \sqrt{x}\cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x & \sqrt{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \sqrt{x}\cos x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x & -\sqrt{x}\sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{x}\cos x}{-\sqrt{x}} = -\sin x$$

לכן $C_1 = \sin x$, $C_2 = \cos x$.

$$y_p = \sin x\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \cos x\frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

נחפש את הפתרון הכללי של המשוואה הנתונה בצורה $y = y_h + y_p$.

$$y = C_1(x)\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2(x)\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

שאלה 4 (20%)

נתונה מערכת המשוואות הדיפרנציאליות: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x}$.

א.(15%) מצאו פתרון כללי של המערכת.

ב.(5%) מצאו את הפתרון של מערכת המשוואות, המקים את תנאי ההתחלה: $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

פתרון

1. (ע"ע):

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2 = 0 \text{ , לכן } \begin{matrix} \lambda_{1,2} = 5 \\ \lambda_{3,4} = 2 \end{matrix} .$$

2. ריבוי גיאומטרי של ע"ע

$$k_1 = 4 - rank \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = 4 - rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$k_2 = 4 - rank \begin{pmatrix} 5-2 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5-2 \end{pmatrix} = 4 - rank \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

מטריצה לכסינה

ו"ע

ל- $\lambda_1 = 5$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0$,

$$,\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\Leftarrow\vec{v}=m\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}v_1=m\\v_2=-2v_1=-2m\\v_3=-3v_4=-3n\\v_4=n\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}-6v_1-3v_2=0\\-3v_3-9v_4=0\end{cases}$$

ל- $\lambda_2=2$: $\begin{pmatrix}3&0&0&0\\-6&0&0&0\\0&0&0&-9\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=0$,

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\vec{v}=m\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{cases}v_1=0\\v_2=m\\v_3=n\\v_4=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}3v_1=0\\3v_4=0\end{cases}$$

פתרון כללי: $\vec{x}=C_1e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_4e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$

הפתרון של מערכת המשוואות, המקים את תנאי ההתחלה הנתון:

$$,\begin{cases}C_1=1\\C_2=0\\C_3=2\\C_4=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}C_1=1\\-2C_1+C_3=0\\-3C_2+C_4=-1\\C_2=0\end{cases},C_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

הפתרון של מערכת המשוואות, המקים את תנאי ההתחלה הנתון הוא: $\vec{x}_p=e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}+2e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

שאלות האמריקאיות

<u>אין לרשום נימוקים. יש לסמן תשובה אחת בלבד, תשובה שגויה ובכלל זה סימון של יותר מתשובה אחת יגרור קבלת ניקוד 0.</u>

<u>שאלה 5 (6%)</u> יהיו $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ פתרונות בת"ל של המד"ר $(x+1)y''' + 2y'' - 2x^2 y = 0$

המקיימים את תנאי ההתחלה הבאים:

$$y_1(1) = 2, \quad y_1'(1) = 0, \quad y_1''(1) = 0$$

$$y_2(1) = -1, \quad y_2'(1) = 1, \quad y_2''(1) = -1,$$

$$y_3(1) = 0, \quad y_3'(1) = 0, \quad y_3''(1) = -2$$

הפתרון $y(x)$ לכל $x \in (-1, \infty)$ שמקיים את התנאי ההתחלה: $y(1) = 2, y'(1) = -1, y''(1) = 3$ שווה ל-

1. $y(x) = \frac{1}{2} y_1(x) + y_2(x) - y_3(x)$
2. $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x) - y_3(x)$
3. $y(x) = y_1(x) + y_2(x) - \frac{1}{2} y_3(x)$
4. $y(x) = \frac{1}{2} y_1(x) - y_2(x) - y_3(x)$
5. $y(x) = \frac{1}{2} y_1(x) - y_3(x)$

פתרון

פונקציות נתונות בת"ל, אז לכל $x \in (-1, \infty)$ פתרון כללי שווה

$$y(1) = 2 = 2C_1 - C_2 \Leftarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -1, C_3 = -1 \Leftarrow y'(1) = -1 = C_2 \Leftarrow y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + C_3' y_3(x)$$

$$y''(1) = 3 = -C_2 - 2C_3 \Leftarrow y''(x) = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + C_3 y_3''(x)$$

אז $y(x) = \frac{1}{2} y_1(x) - y_2(x) - y_3(x)$

שאלה 6 (6%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y''-2y'+y=f(t)$ כאשר $f(t)=\begin{cases} e^t, & 0\le t<1 \\ te^t, & 1\le t \end{cases}$. אז פתרון פרטי של המשוואה, המקיים את תנאי ההתחלה: $y(0)=0,\ y'(0)=0$ הוא:

1. $y(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{6}u_1(t)(t-1)^2e^t$
2. $y(t)=\frac{1}{6}t^2e^t+\frac{1}{2}u_1(t)(t-1)^3e^t$
3. $y(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{e}{6}(t-1)^2u_1(t)$
4. $y_p=\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{6}u_1(t)\left(t-1\right)^3e^t$
5. $y(t)=\frac{1}{2}t^2e^t-\frac{1}{2}(t-1)^2e^{t-1}u_1(t)$

פתרון:

$$f(t)=e^t-u_1(t)e^t+u_1(t)te^t=e^t-u_1(t)e^t+u_1(t)(t-1+1)e^t=e^t+u_1(t)(t-1)e^t=$$
$$=e^t+eu_1(t)(t-1)e^{t-1}$$

$$L\left[f(t)\right](s)=\frac{1}{s-1}+e\frac{e^{-s}}{(s-1)^2}$$

$L\left[y''-2y'+y\right](s)=s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)$, כאשר $L\left[y(t)\right](s)=Y(s)$

$$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}+e\frac{e^{-s}}{(s-1)^2}$$

$$Y(s)\left(s-1\right)^2=\frac{1}{s-1}+e\frac{e^{-s}}{(s-1)^2}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}+e\frac{e^{-s}}{(s-1)^4}$$

$$y_p=L^{-1}\left[Y(s)\right](t)=\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{e}{6}u_1(t)\left(t-1\right)^3e^{t-1}=\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{6}u_1(t)\left(t-1\right)^3e^t$$

<u>שאלה 7 (6%)</u> נתונה המשוואה $(1-x^2)y''+2y=0$. מחפשים פתרון בצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

אילו תנאי ההתחלה $y(0),\ y'(0)$ צריך לבחור כדי לקבל פתרון שהוא פולינום (לא טריוויאלי):

1. $y(0)=1,\ y'(0)=0$
2. $y(0)=1,\ y'(0)=1$
3. $y(0)=0,\ y'(0)=1$
4. $y(0)=0,\ y'(0)=-1$
5. $y(0)=0,\ y'(0)=0$

פתרון

נחפש פתרון בצורה: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ אז $y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}$, $y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$

נציב במשוואה: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}-x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$. נעשה הזזת אינדקסים.

$$\sum_{k=-2}^{\infty}a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kk(k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}2a_kx^k=0$$

$\sum_{k=0}^{\infty}[a_{k+2}(k+2)(k+1)-a_kk(k-1)+2a_k]x^k=0$ מכן מקבלים: $a_{k+2}=\frac{a_k(k-2)}{(k+2)}$

ידוע ש- $y(0)=a_0$, $y'(0)=a_1$

$$k=0:\ a_2=\frac{-a_0\cdot 2}{2}=-a_0$$

$$k=1:\ a_3=\frac{-a_1}{3}$$

$$k=2:\ a_4=0$$

כדי לקבל פתרון שהוא פולינום (לא טריוויאלי) נדרש ש- $k=3\Leftarrow a_5=0$ ו- $a_5=\frac{a_3}{5}$ אז

$a_3=a_1=0$. מקבלים פולינום $y(x)=a_0-a_0x^2=a_0(1-x^2)$, לפי תנאי התחלה

$y'(0)=0,\ y(0)\neq 0$ מקבלים פולינום לא טריוויאלי. אז תנאי התחלה המתאים הוא:

$y(0)=1,\ y'(0)=0$

<u>שאלה 8</u> <u>(6%)</u> יהי $y(x)$ פתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $y' = (y^2 - 4)e^{1+x+y}$ המקיים תנאי ההתחלה $y(0) = 3$ אז הפונקציה $y(x)$ היא בהכרח:

1. חסומה ומונוטונית עולה
2. חסומה רק מלמטה ומונוטונית עולה
3. חסומה רק מלמעלה ומונוטונית יורדת
4. חסומה ומונוטונית יורדת
5. קו ישר

<u>פתרון:</u>

פונקציות $f(x,y) = (y^2 - 4)e^{1+x+y}$ ו- $f'_y(x,y)$ רציפות בכל נקודה של מישור xy, אז המשוואה מקיימת משפט קיום ויחדות בכל נקודה של מישור xy. מכן נווה שדרך כל הנקודה של מישור xy עובר פתרון אחד ויחד. מצורת המשוואה אפשר לראות ש- $y = 2$, $y = -2$ פתרונות של המשוואה.

לפי ת"ה $y(0) = 3$ מקבלים שפתרון שמקיים את התאי ההתחלה הוא חסום רק מלמטה $2 < y(x)$ אז מקבלים ש- $\forall x$ $y'(x) > 0$, אז פונקציה $y(x)$ עולה לכל x. קיבלנו שפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית $y' = (y^2 - 4)e^{1+x+y}$ המקיים תנאי ההתחלה $y(0) = 3$ היא פונקציה חסומה רק מלמטה ומונוטונית עולה

שאלה 9 (6%)

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית: $x^2 y'' + 5xy' + 4y = \frac{3}{x},\ x > 0$.

אז הפתרון הכללי שלה הוא מהצורה:

1. $y(x) = C_1 \frac{1}{x^2} + C_2 \frac{\ln x}{x^2} + A(\ln x)^3$
2. $y(x) = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{\ln x}{x^2} + \frac{A(\ln^2 x)}{x}$
3. $y(x) = C_1 \frac{1}{x^2} + C_2 \frac{\ln x}{x} + Ax^3$

4. $y(x)=C_1\frac{1}{x^2}+C_2\frac{\ln x}{x^2}+\frac{A\ln x}{x}$

5. $y(x)=C_1\frac{1}{x^2}+C_2\frac{\ln x}{x^2}+\frac{A}{x}$

פתרון

המשוואה הנתונה היא משוואת אוילר אי-הומוגנית. הצבה: $x=e^t,\ t=\ln x$

פ"א: $k(k-1)+5k+4=0\Rightarrow k^2+4k+4=0\Rightarrow k_{1,2}=-2$

פתרון של משוואה הומוגנית הוא: $y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}\Rightarrow y_h(x)=C_1\frac{1}{x^2}+C_2\frac{\ln x}{x^2}$

$f(t)=3e^{-t}\Rightarrow s=-1,\ p=0,\ l=0$

וצורת הפתרון פרטי למשוואה היא: $y_p(t)=Ae^{-t}\Rightarrow y_p(x)=\frac{A}{x}$

אז הפתרון הכללי של משוואה הוא מהצורה: $y(x)=C_1\frac{1}{x^2}+C_2\frac{\ln x}{x^2}+\frac{A}{x}$